

具有运动边界不可压缩黏性流动的 CBS 有限元解法

孙旭, 张家忠

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 基于特征分裂(CBS)算法,提出了一种适用于具有运动边界的不可压缩黏性流动问题的有限元解法,给出了不可压缩黏性流动问题的控制方程,并推导了其无量纲形式. 将传统 CBS 算法与动网格技术相结合,提出了一种动边界流动问题的求解流程,并对所采用的基于弹簧近似的动网格方法进行了说明. 采用该方法对静水和均匀来流中的简谐振动圆柱绕流问题进行了求解,计算所得圆柱受力、圆柱表面压力和涡量分布以及流场速度分布等结果均与已有数值或实验结果相吻合,初步验证了所提方法的可行性.

关键词: 特征分裂算法;有限元法;不可压缩流动;动边界

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2011)01-0099-06

A Characteristic-Based Split-FEM Scheme for Incompressible Viscous Flow with Moving Boundaries

SUN Xu, ZHANG Jiazhong

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A characteristic-based split (CBS)-FEM scheme for the incompressible viscous flow with moving boundaries was proposed, including the governing equations established and the corresponding non-dimensional equations deduced. Moreover, combined the conventional CBS algorithm with the mesh moving technique, a solution procedure in Eulerian coordinates was obtained and the spring analogy-based mesh moving technique was discussed. In addition, the proposed method was applied to two flow problems, i. e. the flow induced by the harmonic oscillating circular cylinder in water at rest, and the uniform flow around a transversely oscillating circular cylinder. The numerical results such as the drag and lift forces of the cylinder, the pressure and vorticity on the cylinder surface, and the velocity distribution of the flow field agree well with the numerical and experimental results in literatures.

Keywords: characteristic-based split; finite element method; incompressible flow; moving boundary

基本特征分裂 (Characteristic-Based Split, CBS) 有限元方法^[1]是一种重要的针对流动问题的有限元解法,与 Petrov-Galerkin 迎风有限元、Tay-

lor-Galerkin 有限元等方法相比,其求解过程更加简单. 另外,对于不可压缩黏性流动问题,CBS 算法在求解过程中允许速度和压力采用同阶的基函数,从

而避开了 Babuška-Brezzi (BB) 条件. 因此, 该方法自 Zienkiewicz 等人于 20 世纪 90 年代首次提出以来, 已经广泛应用到了各种流动问题之中.

近年来, 越来越多的学者开始采用 CBS 算法来求解具有运动边界的流动问题, 如 Nithiarasu^[2] 将 CBS 算法与 ALE 方法^[3] 相结合, 对溃坝流动和水面孤立波的传播问题进行了求解, Nobari 和 Naderan^[4-5] 采用 Nithiarasu 的方法求解了自由来流中振动圆柱的绕流问题, 段庆林^[6] 将 CBS 算法与 ALE 方法和无网格解法相结合, 成功地求解了成型充填过程中非等温非牛顿黏性流动问题. 这些解法均是通过将 CBS 与 ALE 相结合实现的, 求解过程比较复杂. 另外, 由于 ALE 坐标下 NS 方程的对流项含有网格速度项, 网格速度将会给计算的稳定性带来新的影响.

本文根据 CBS 算法的特点, 针对具有运动边界的不可压缩黏性流动问题, 提出了一种简单、有效的求解方法, 并采用所提出方法对静水中自由来流的振动圆柱绕流问题进行了求解.

1 控制方程

非守恒形式的黏性不可压缩 NS 方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: u_i 为流体速度; ρ 为密度; p 为压强; ν 为运动黏性系数; ρf_i 为体积力. 设参考速度为 U , 特征长度为 L , 参考密度为 ρ_∞ , 定义 $\tilde{u}_i = \frac{u_i}{U}$, $\tilde{x} = \frac{x}{L}$, $\tilde{t} = \frac{tU}{L}$,

$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}$ (不可压缩流动中 $\tilde{\rho} = 1.0$), $\tilde{p} = \frac{p}{(\rho_\infty U^2)}$, $\tilde{f}_i = \frac{f_i L}{U^2}$, 则式(1)的无量纲形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j} + \tilde{f}_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $Re = UL/\nu$.

2 数值求解方法

对于具有运动边界的流动问题, 流场中部分边界的位置将随时间不断变化. 采用数值方法进行求解时, 如果在计算过程中规定动边界上的网格节点随边界同步运动, 将造成动边界附近的网格单元发

生扭曲甚至重叠; 如果规定计算网格固结于空间坐标上, 不随边界移动, 这将给边界位置的捕捉带来困难.

采用动网格技术, 可以令边界上的节点随边界运动, 同时允许求解区域内的节点发生独立的运动, 这样既可以准确描述边界的位置, 也可以保证网格的质量. 本节将传统 CBS 算法与动网格技术相结合, 提出了一种网格运动时方程(2)的求解方法. 为了方便起见, 本节公式在推导过程中省略了无量纲标示符号.

2.1 网格运动时的 CBS 解法

根据 CBS 算法求解思路^[1], 通过坐标变换可消除控制方程(2)中动量方程的对流项, 得到新坐标系 X' 下的动量方程. 就流动问题而言, 随流体质点运动的 Lagrange 坐标系可以作为 X' 坐标系, 其上的动量方程可以表示为

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (3)$$

式中第一项表示流体质点的速度变化率.

下面对式(3)中的时间导数项进行离散. 图1中给出了时间间隔 Δt 内的流体质点和网格点的运动情况. 取 t^{n+1} 时刻网格节点 A' 处的流体质点为研究对象, 并假设该流体质点在 t^n 时刻位于 B 点, A' 的空间坐标为 x , A 和 B 两点间的距离为 δ_1 , 通过式(3)可得

$$\frac{u_i^{n+1} \Big|_x - u_i^n \Big|_{(x-\delta_1)}}{\Delta t} = (1-\theta) \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \right)^n \Big|_{(x-\delta_1)} + \theta \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \right)^{n+1} \Big|_x \quad (4)$$

式中: $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta = 0$ 时为显式格式, $\theta = 1$ 时为隐式格式. 式(4)中 Δt 内流体质点移动的距离 δ_1 可以近似为

$$\delta_1 = \Delta t u^n \Big|_{x-\delta_1} = \Delta t u^n \Big|_x + o(\Delta t^2) \quad (5)$$

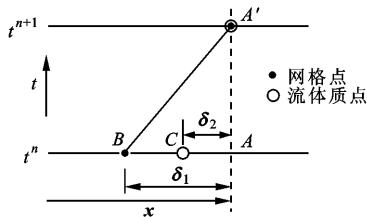


图1 Δt 内流体质点和网格点的运动情况

通过 Taylor 展开来表示 $\mathbf{x}-\boldsymbol{\delta}_1$ 处的变量,并将式(5)代入式(4)整理可得

$$\begin{aligned} & u_i^{n+1} \Big|_{\mathbf{x}} - u_i^n \Big|_{\mathbf{x}} = \\ & -\Delta t \left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial p^{n+\theta}}{\partial x_i} + f_i^n \right) \Big|_{\mathbf{x}} + \\ & \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \right)^n \Big|_{\mathbf{x}} \quad (6) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p^{n+\theta}}{\partial x_i} = \theta \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + (1-\theta) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \quad (7)$$

式中: u_i^{n+1} 、 p^{n+1} 为网格节点 A' 上的变量; u_i^n 、 p^n 和 f_i^n 为 A 处的变量. 式(6)即为空间坐标 $\mathbf{x}$ 处动量方程的离散形式. 需要说明的是,在式(6)的推导过程中,除了压强项之外,其他变量均采用显式格式.

网格运动时,式(6)中的网格节点 A' 在 t^n 时刻并不在 A 处, A 处任意流动参数 ϕ^n 可以由网格点 C 求得,而 ϕ^n 的 Taylor 展开式为

$$\phi^n \Big|_{\mathbf{x}} = \phi^n \Big|_{x_c} - \delta_{2j} \frac{\partial \phi^n}{\partial x_j} \Big|_{x_c} + o(|\boldsymbol{\delta}_2|^2) \quad (8)$$

式中: $\boldsymbol{\delta}_2$ 表示在 Δt 内网格节点 A' 移动的距离.

对式(6)求解可以通过以下 3 步进行.

(1) 引入中间变量

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_i^n - \Delta t \left(u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \right) + \\ & \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + f_i \right)^n \quad (9) \end{aligned}$$

(2) 求解 $n+1$ 时刻的压强 p^{n+1} , 即

$$\theta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i^* - \Delta t(1-\theta) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) \quad (10)$$

(3) 求解 $n+1$ 时刻的速度 u_i^{n+1} , 即

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^n \quad (11)$$

因此,根据上文的描述,对于具有运动边界的不可压缩黏性流动问题,可以按照如下流程进行求解:

Do $i=1$, 总的计算时间步

(1) 根据 t^n 时刻的网格和边界运动方式,采用动网格技术得到 t^{n+1} 时刻网格和每一个节点的位移 $\boldsymbol{\delta}_2$;

(2) 通过式(8)计算 t^{n+1} 时刻网格节点所在位置在 t^n 时刻的流动参数 u_i^n 、 p^n 和 f_i^n ;

(3) 通过式(9)求解 u_i^* ;

(4) 通过式(10)求解 p^{n+1} ;

(5) 通过式(11)求解 u_i^{n+1} ;

Enddo

对于式(9)~式(11)的有限元离散,详细过程见文献[1].

2.2 网格运动

为了满足运动边界条件,前文给出的求解流程需要不断地进行网格调整. 目前,针对三角形非结构化网格已有多种动网格生成方法,本文采用了文献[7]中的边弹簧近似法. 首先,将 t^n 时刻的计算网格等效为由相互连接的弹簧组成的系统. 定义相邻节点 I 和 J 间的弹簧平衡长度等于两节点的距离,定义弹簧刚度

$$k_{IJ} = a_1((x_I - x_J)^2 + (y_I - y_J)^2)^{a_2} \quad (12)$$

式中: a_1 、 a_2 为控制参数,本文中 $a_1 = 1.0$, $a_2 = -1.0$. 由于所有弹簧的实际长度均等于其平衡长度,所以弹簧系统处于平衡状态. 在 t^{n+1} 时刻,运动边界上的网格节点发生移动,部分弹簧上的受力不再为 0,弹簧系统的受力平衡也将遭到破坏. 此时,任意节点 I 上的弹性合力为

$$\mathbf{F}_I = \sum_{j=1}^{N_I} k_{IJ} (\boldsymbol{\delta}_J - \boldsymbol{\delta}_I) \quad (13)$$

式中: N_I 表示与节点 I 相邻的节点个数; $\boldsymbol{\delta}_I$ 和 $\boldsymbol{\delta}_J$ 表示节点 I 和 J 的位移. 在弹性力的作用下,网格节点将发生移动. 根据受力平衡准则,当弹簧系统重新达到平衡时,任意节点上

$$\mathbf{F}_I = \sum_{j=1}^{N_I} k_{IJ} (\boldsymbol{\delta}_J - \boldsymbol{\delta}_I) = 0 \quad (14)$$

由式(14)和边界上的位移便可求得每个节点上的位移. 本文将采用预条件共轭梯度法[8]对式(14)进行求解. 根据每一个节点上的位移, t^{n+1} 时刻网格节点所处的位置可以表示为

$$\mathbf{x}_I^{n+1} = \mathbf{x}_I^n + \boldsymbol{\delta}_I \quad (15)$$

3 计算实例及分析

为了验证算法的可行性,本文对静水中和均匀来流中的振动圆柱绕流流场进行了计算,这 2 个问题的求解过程均未考虑体积力的影响.

3.1 静水中的圆柱振动

图 2 给出了静水中简谐振动圆柱绕流的计算区域和无量纲边界条件. 计算区域外边界的直径为 $100D$,其上速度为 0,并设任意一点的压强为 0. 圆柱沿 x 方向作简谐振动,其无量纲运动方程为

$$\tilde{x}(t) = -\tilde{\mathcal{A}} \sin(2\pi \tilde{f} \tilde{t}) \quad (16)$$

式中: $\tilde{x} = x/D$ 表示圆柱在水平方向上的位移; $\tilde{\mathcal{A}} =$

$\mathcal{A}/D$ 为振动幅值; $\tilde{f}=Df/U_{\max}$ 为简谐振动频率, $U_{\max}$ 为圆柱振动的最大速度, 圆柱表面采用无滑移边界条件. 定义 Reynold 数和 Keulegan-Carpenter 数分别为

$$Re=\frac{U_{\max}D}{\nu};\quad KC=\frac{U_{\max}}{Df}$$

(17)

式中: D 为圆柱直径. 对 $Re=100$ 、 $KC=5$ 的情况进行了计算, 通过式(16)和式(17)可得 $\tilde{\mathcal{A}}=0.795\ 8$ 、 $\tilde{f}=0.2$.

图3给出了静水中简谐振动圆柱绕流的非结构计算网格, 它是沿周向和径向对流场进行剖分后得到的. 采用3种不同密度类型的网格对该圆柱绕流进行了计算, 表1给出了网格相关信息以及计算所得阻力系数 C_D . 从表1可以看出, 采用 Mesh-3 型网格计算所得 C_D 与文献[9-10]的结果之间的偏差均小于1%. 图4给出了采用 Mesh-3 型网格. 计算所得振动相位为 180° 、 210° 和 330° 时流场中部分位置的流速分布, 图中实际流速 u' 、 v' 由计算所得无量纲流速 $\tilde{u}$ 、 $\tilde{v}$ 换算得到. 从图4可以看出, 本文计算结果与文献[10]的实验结果非常吻合.

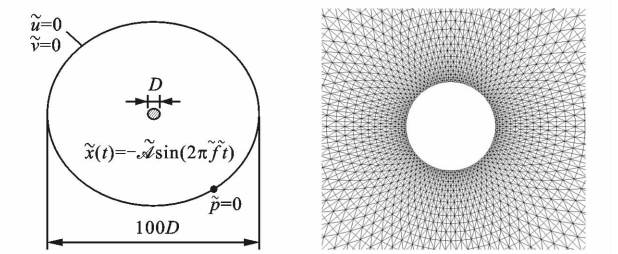


图2 静水中振动圆柱绕流的

图3 静水中振动圆柱绕流的

的计算模型

的计算网络

表1 Re 为 100、 KC 为 5 时的圆柱阻力系数 C_D			
网格类型	节点数	单元数	C_D
Mesh-1	8 100	16 000	2.074
Mesh-2	12 120	24 000	2.075
Mesh-3	16 940	33 600	2.100
文献[9]			2.080
文献[10]			2.090

3.2 均匀来流中的圆柱振动

对 $Re=185$ 时均匀来流中振动圆柱绕流进行了计算, 图5给出了计算区域和无量纲边界条件. 流场进口位于圆柱上游 $10D$ 处, 流动参数为自由来流的参数; 上下边界距离圆柱 $10D$ 处, 边界条件为无

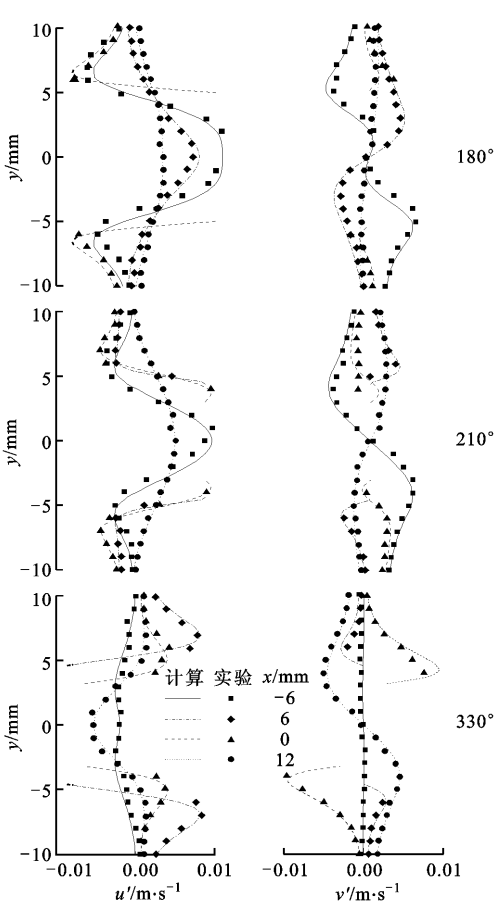


图4 Re 为 100、 KC 为 5、网格数为 140×120 , 计算、实验所得振动相位为 180° 、 210° 和 330° 时流场中部分位置的流速分布

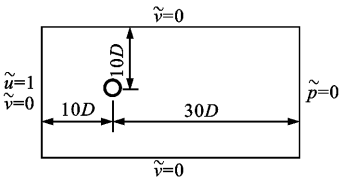


图5 均匀来流中振动圆柱绕流计算模型

穿透边界条件; 出口位于圆柱下游 $30D$ 处, 其上压力为 0 Pa . 圆柱沿垂直于来流方向作简谐振动, 其无量纲运动方程为

$$\tilde{y}(t)=\tilde{\mathcal{A}}\cos(2\pi\tilde{f}t)$$

(18)

式中: $\tilde{y}=\frac{y}{D}$ 为圆柱在垂直于来流方向上的位移; $\tilde{\mathcal{A}}=A/D$ 为振幅; $\tilde{f}=DF/u_\infty$ 为无量纲振动频率, 根据圆柱固定时旋涡自然脱落频率 $\tilde{f}_0$ 来选取. 圆柱表面为无滑移边界条件.

为了获得 $Re=185$ 时圆柱绕流的旋涡自然脱落频率 $\tilde{f}_0$, 首先对圆柱固定时的流场进行计算, 计

算网格通过先将求解区域分成 9 部分然后再剖分得到,如图 6 所示.表 2 给出了不同网格下计算所得圆柱平均阻力系数 $\bar{C}_D$ 、均方根升力系数 $C_{L,rms}$,以及根据升力系数曲线得出的旋涡脱落的斯特罗哈数 S_t .通过对比可以看出,本文计算所得升力、阻力系数比文献[9,11]中的结果略大,斯特罗哈数则非常吻合.通过 S_t 可以求得 $Re=185$ 时无量纲旋涡自然脱落频率 $\tilde{f}_0=0.196$.

表 2 Re 为 185 时均匀来流中固定圆柱绕流计算结果

网格类型	节点数	单元数	$\bar{C}_D$	$C_{L,rms}$	S_t
Mesh-1	4 550	8 800	1.374	0.514	0.194
Mesh-2	13 260	26 000	1.369	0.485	0.196
Mesh-3	32 710	64 600	1.363	0.473	0.196
文献[9]			1.310	0.422	0.195
文献[11]			1.287	0.443	0.195

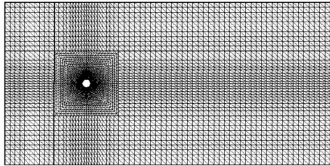


图 6 均匀来流中振动圆柱绕流计算网络

采用 Mesh-2 型网格对 $\tilde{A}=0.2, \tilde{f}/\tilde{f}_0=0.8, 1.0, 1.2$ 时振动圆柱绕流流场进行了计算.图 7 和图 8 给出了 3 种振动频率下圆柱运动到上方最大位置时表面压强系数 C_p 及无量纲涡量 V 的分布情况.图中 θ 表示圆柱表面节点相对于圆柱中心的转角,其值在迎风面驻点处为 0,并按顺时针方向增加.如图 7 所示,本文计算所得 C_p 与文献[9]的结果非常吻合.图 8 中,在涡量绝对值较小的地方,本文计算结果与文献[9]非常吻合,在涡量较大的地方二者略有偏差.在求解过程中,流速采用线性插值基函数,涡量(流速的一阶导数)在单元相邻处不连续,这是造成二者涡量偏差的主要原因.

图 9 给出了不同振动频率下圆柱升力系数 C_L 、阻力系数 C_D 随时间的变化情况.从图 9 中可以看出:当圆柱的振动频率较低($\tilde{f}/\tilde{f}_0=0.8, 1.0$)时, C_L, C_D 均随时间呈简谐形式周期变化, $\tilde{f}$ 的增加将改变 C_L, C_D 变化的幅值,但并不改变流场中流线的拓扑结构;当 $\tilde{f}$ 较高时, C_L, C_D 呈现出完全不同的变化形式,流场中流线的拓扑结构也将发生变化.关于 $\tilde{f}$ 对振动圆柱绕流流场的影响,可参见文献[9,11].

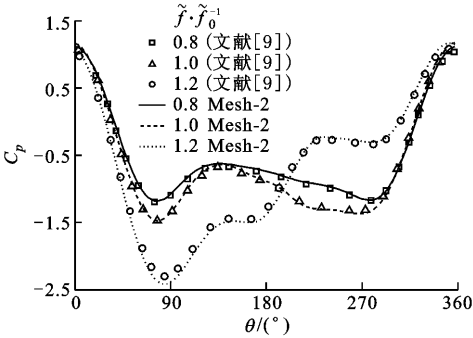


图 7 圆柱运动到上方最大位置时表面压强系数分布

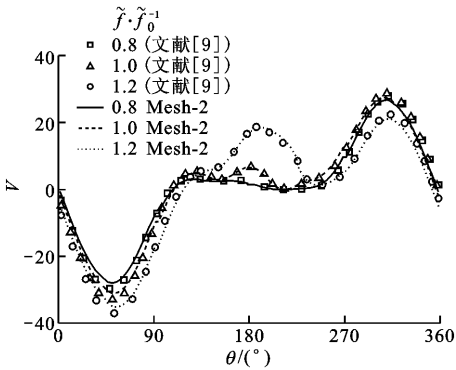


图 8 圆柱运动到上方最大位置时表面涡量的分布

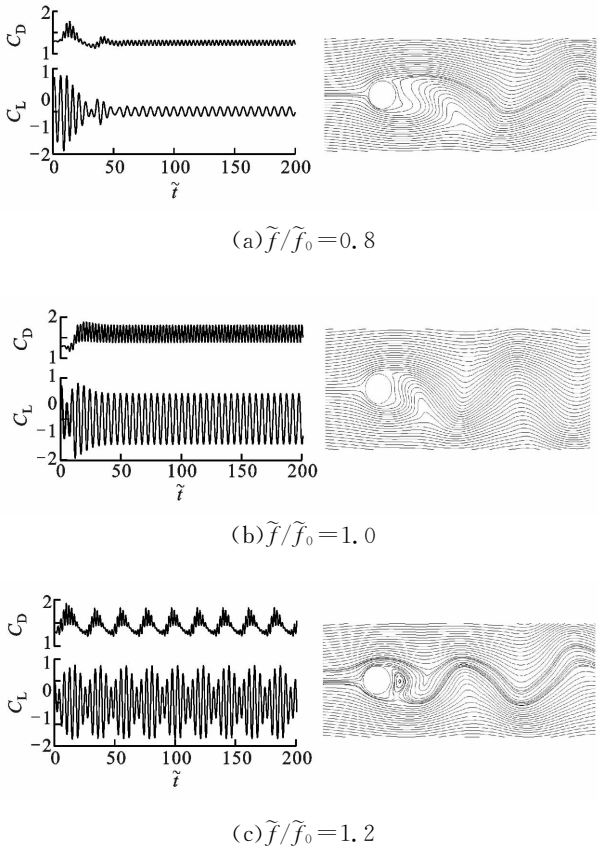


图 9 不同振动频率下圆柱升力、阻力系数随时间的变化及圆柱运动到上方最大位置时的瞬时流场

4 结 论

本文给出了一种动网格上的 CBS 计算流程,用于求解具有运动边界的不可压缩黏性流动问题.作为验证,对 $Re=100$ 、 $KC=5$ 时静水中振动圆柱绕流和 $Re=185$ 、 $\tilde{f}/\tilde{f}_0=0.8, 1.0, 1.2$ 时均匀来流中的振动圆柱绕流问题进行了求解,所得结果与已有实验和数值结果非常吻合,说明了算法的可行性.与 Nithiarasu 所提方法相比,本文计算仍在欧拉坐标系下完成,程序主体与传统的 CBS 解法基本相同,求解过程更加简单.

需要说明的是,该算法在计算时的每一步都要先根据边界运动求出 t^{n+1} 时刻的网格,因而只适用于动边界运动方式已知的情况.对于动边界运动未知的问题(如具有自由水面的流动问题),需要对已有的求解流程进行改进,这也是下一步需要研究的内容.

参考文献:

- [1] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R L. The finite element method: volume 3 fluid dynamics [M]. 5th ed. Oxford, UK: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [2] NITHIARASU P. An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (CBS) scheme [J]. Int J Numer Meth Fluids, 2005, 48(12): 1415-1428.
- [3] 岳宝增, 李笑天. ALE 有限元方法研究及应用[J]. 力

学与实践, 2002(2): 7-11.

YUE Baozeng, LI Xiaotian. Study of the ALE finite element method and its applications[J]. Mechanics in Engineering, 2002(2): 7-11.

- [4] NOBARI M R H, NADERAN H. A numerical study of flow past a cylinder with cross flow and inline oscillation [J]. Comput Fluids, 2006, 35(4): 393-415.
- [5] NOBARI M R H, GHAZANFARIAN J. A numerical investigation of fluid flow over a rotating cylinder with cross flow oscillation [J]. Comput Fluids, 2009, 38(10): 2026-2036.
- [6] 段庆林. 成型充填过程中非等温非牛顿粘性流动的 ALE 有限元与无网格自适应耦合模拟[D]. 大连: 大连理工大学能源与动力学院, 2007.
- [7] BLOM F J. Considerations on the spring analogy [J]. Int J Numer Meth Fluids, 2000, 32(6): 647-648.
- [8] 王勘成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 245-250.
- [9] GUILMINEAU E, QUEUTEY P. A numerical simulation of vortex shedding from an oscillating circular cylinder [J]. J Fluids Struct, 2002, 16(6): 773-794.
- [10] DÜTSCH H, DURST F, BECKER S, et al. Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers [J]. J Fluid Mech, 1998, 360: 249-271.
- [11] LU X Y, DALTON C. Calculation of the timing of vortex formation from an oscillating cylinder [J]. J Fluids Struct, 1996, 10(5): 527-541.

(编辑 苗凌)